

Математическое моделирование в геофизике и биоматематике.

Фадеев Ростислав Юрьевич

К.ф.-м.н., н.с.

Институт вычислительной математики РАН

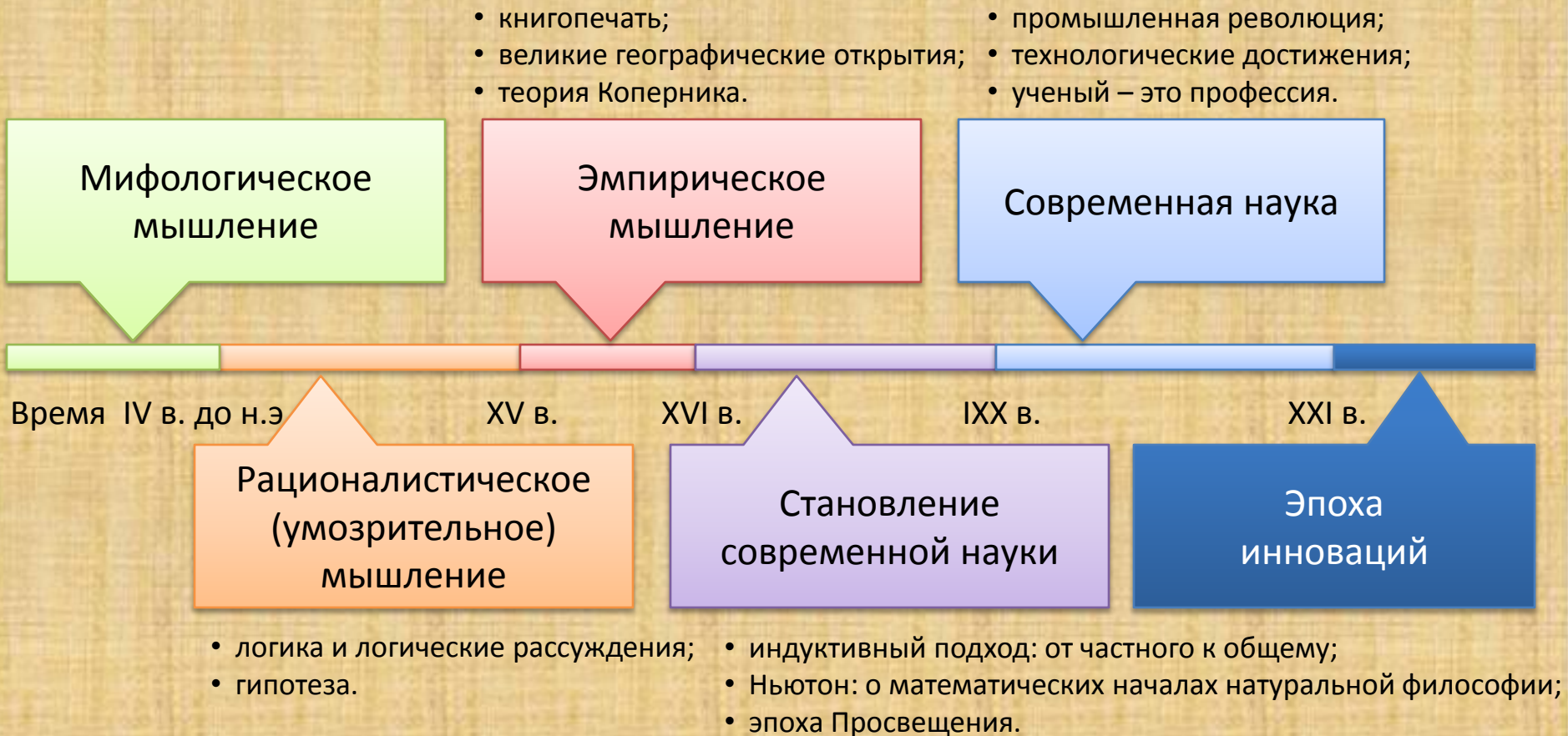
e-mail: lord.rrd@gmail.com

29 июня 2015

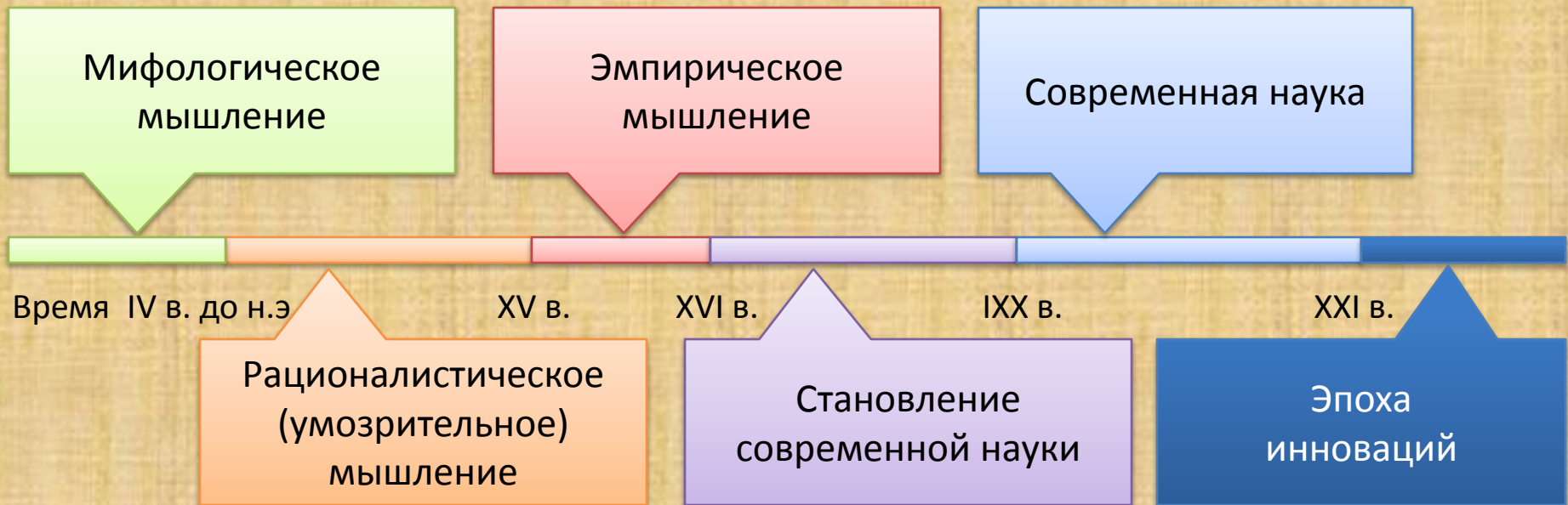
Летняя Суперкомпьютерная Академия,

Москва, МГУ

История науки.



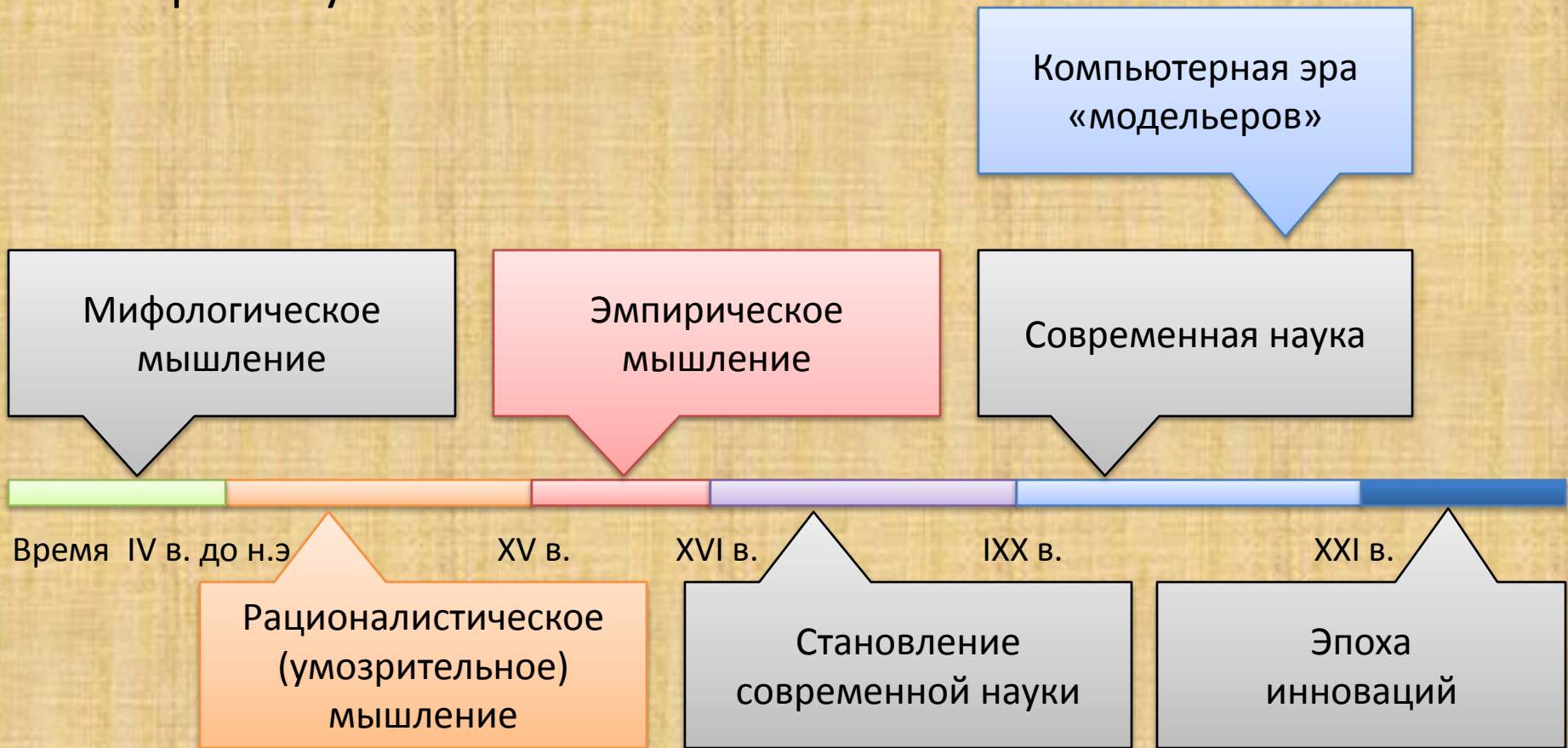
История науки.



Инновационный процесс – это процесс последовательного превращения идеи в товар.

Время инновационного процесса стремительно уменьшается.

История науки.



Инновационный процесс – это процесс последовательного превращения идеи в товар.

Время инновационного процесса стремительно уменьшается.

Турбулентность: история вопроса.



Старик и изучение воды, 1513.



«...doue la **turbolenza** dellacqua
sigenera doue la **turbolenza**
dellacqua simantiene plugho doue
la **turbolenza** dellacqua siposa ...»



Леонардо да Винчи
1452-1519

Турбулентность: история вопроса.

Осборн Рейнольдс 1842-1912

Число Рейнольдса Re характеризует соотношение инерционных и вязких сил действующих на частицу жидкости.

$$Re = \frac{UL}{(\nu/\rho_0)}$$

U – характерная скорость;

L – характерный масштаб;

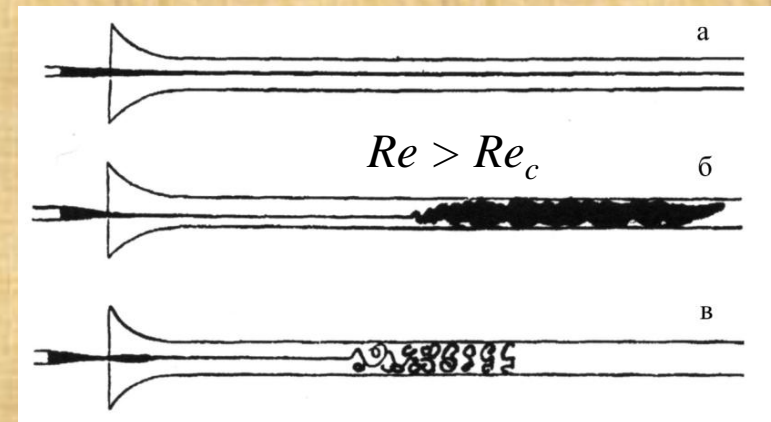
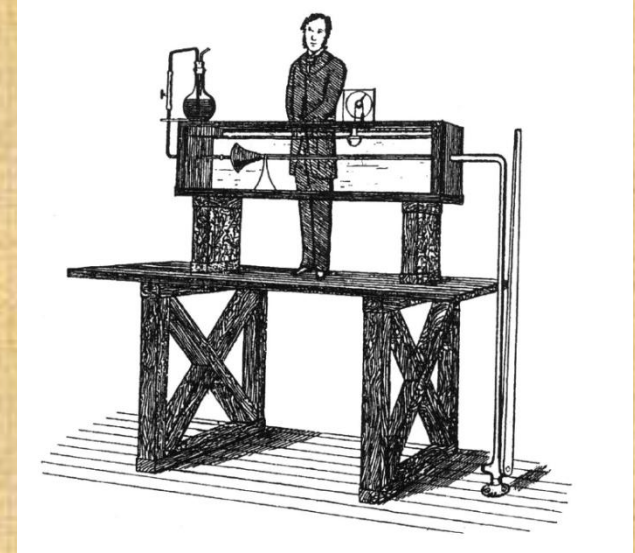
ν – динамическая вязкость;

ρ_0 – плотность жидкости или газа.

Reynolds O. 1883

An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water in parallel channels shall be direct or sinuous and of the law of resistance in parallel channels.

Philos. Trans. R. Soc 174:935–82



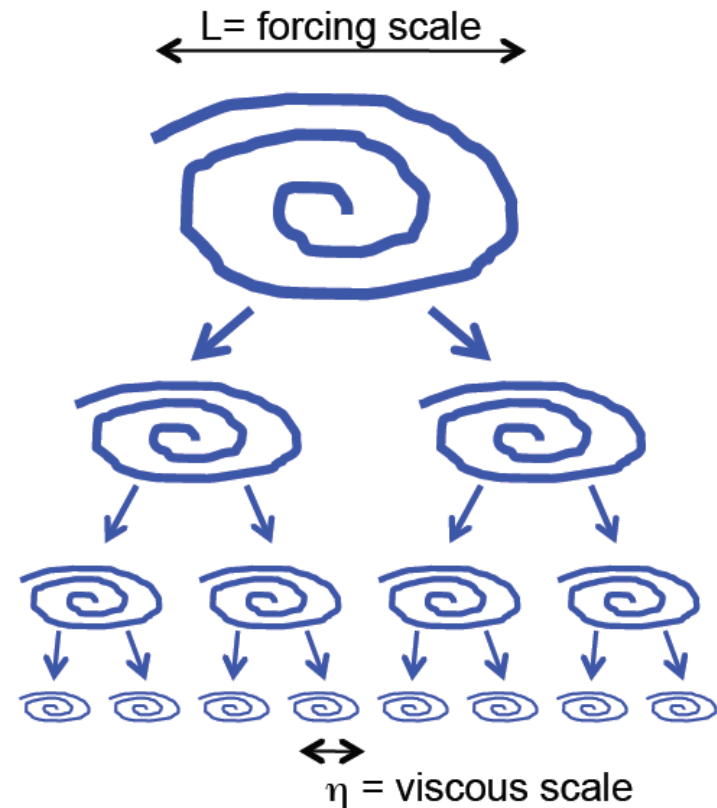
Турбулентность: история вопроса.

Л. Ф. Ричардсон (1881 -1953)
впервые предложил идею
прямого турбулентного
каскада.

*"Big whorls have little whorls
That feed on their velocity,
And little whorls have lesser whorls
And so on to viscosity."*

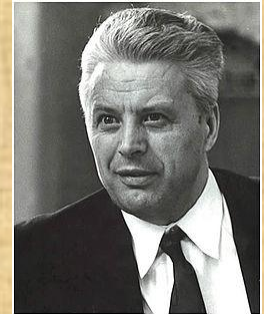
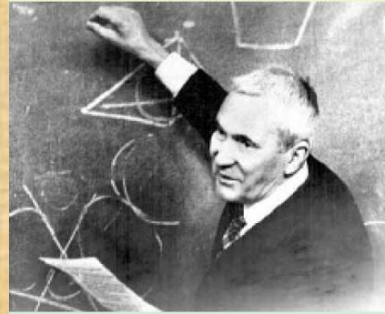


L.F. Richardson 1922

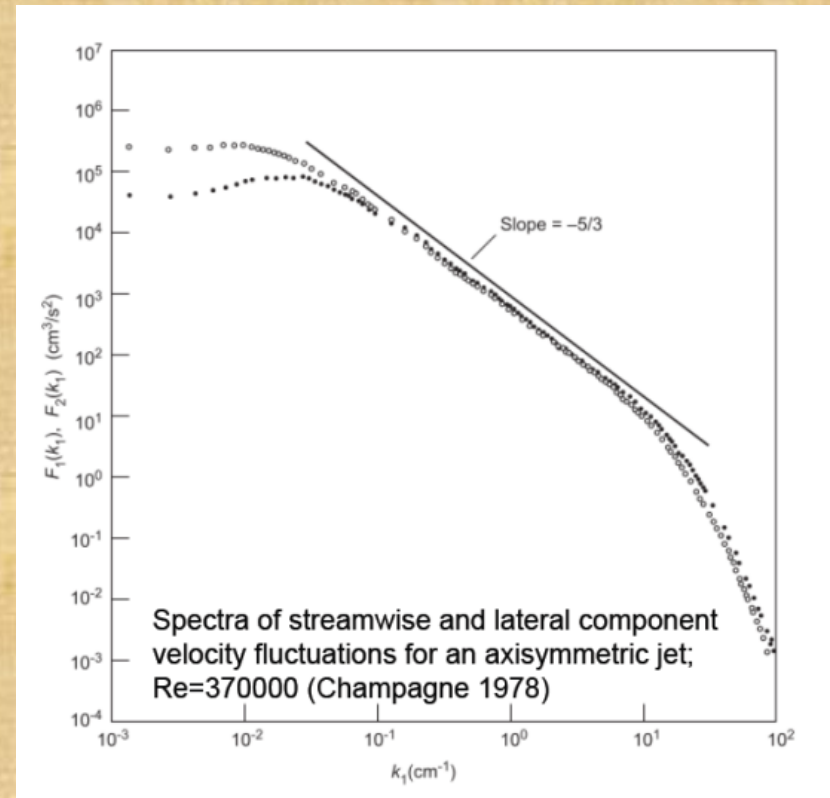


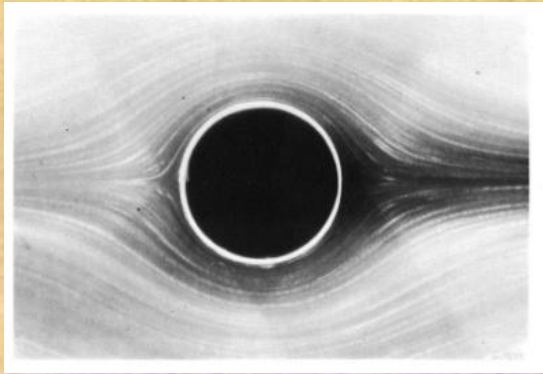
Турбулентность: история вопроса.

А. Н. Колмогоров (1903-1987),
А. М. Обухов (1918-1989),
А. С. Монин (1921-2007).



При очень больших числах Рейнольдса мелкомасштабные турбулентные движения однородны, изотропны и статистически стационарны независимо от характера крупномасштабных движений.

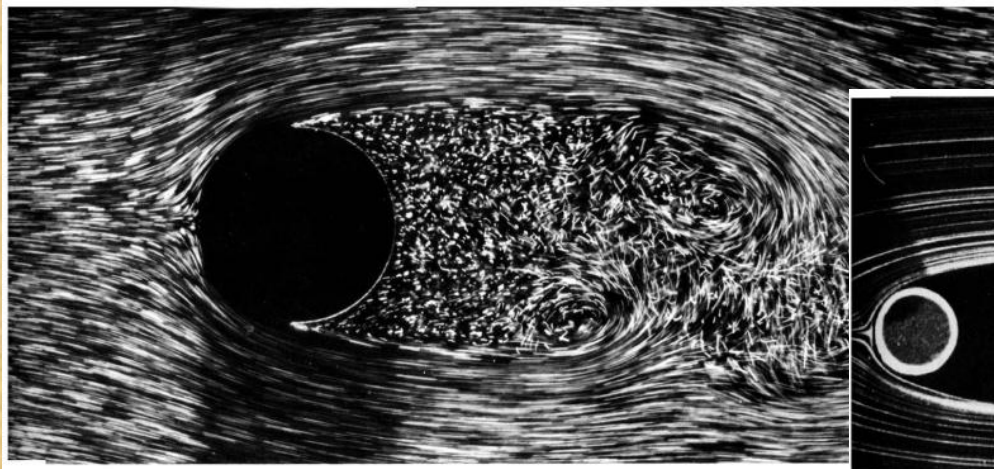




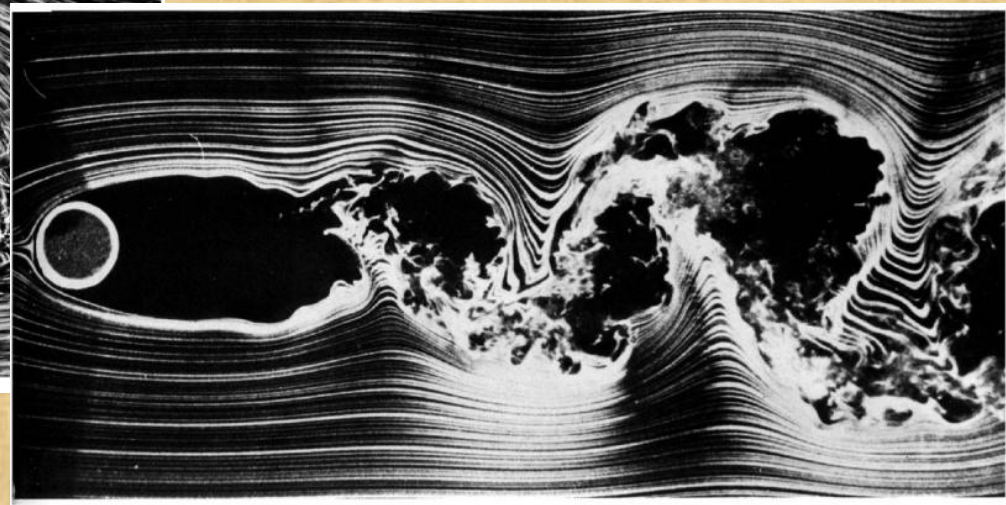
Re = 0.16



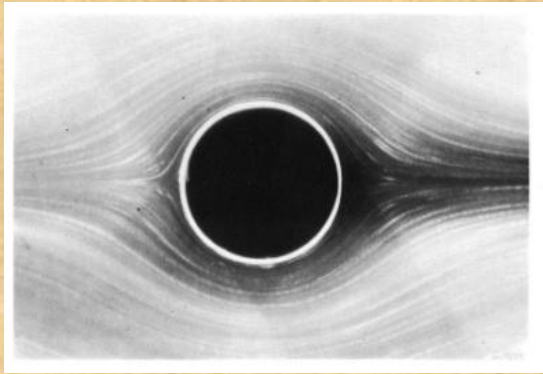
Re = 140



Re = 2000



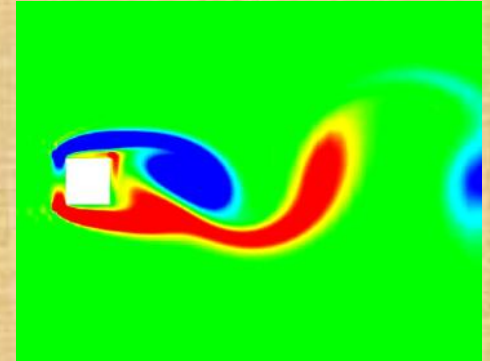
Re = 10000



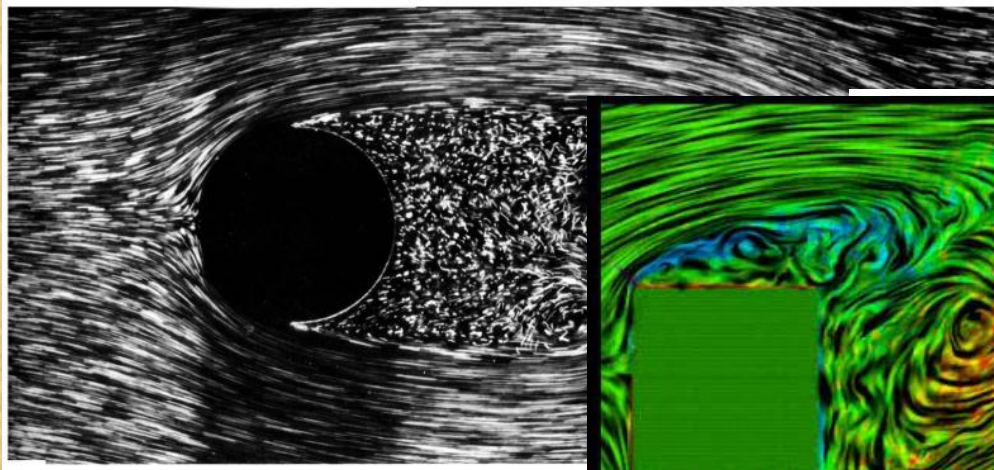
Re = 0.16



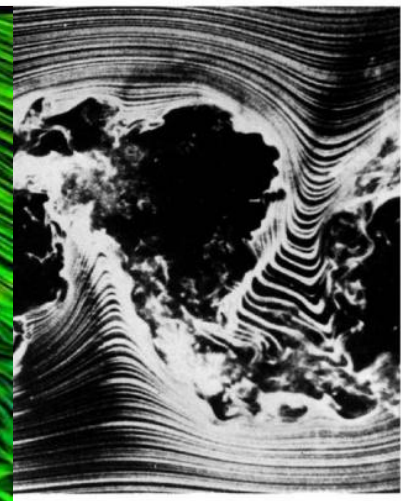
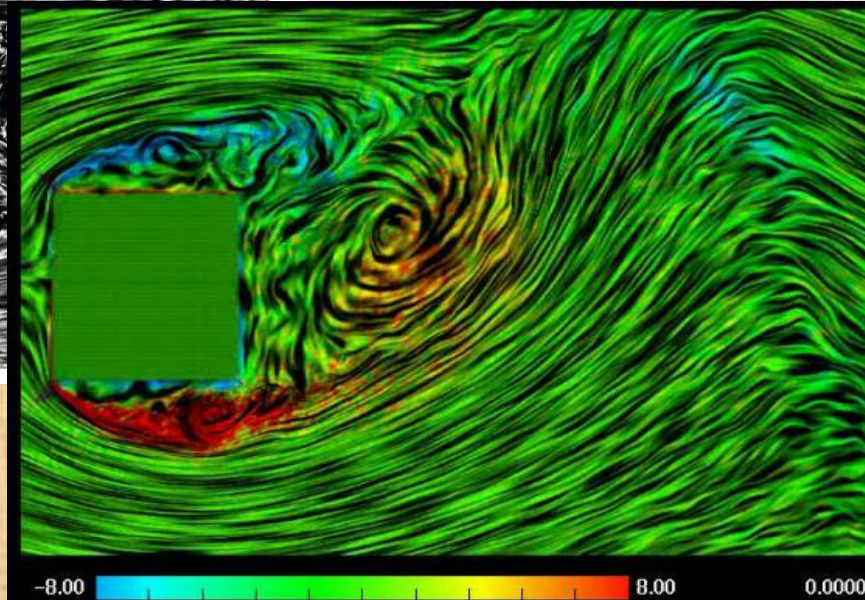
Re = 140

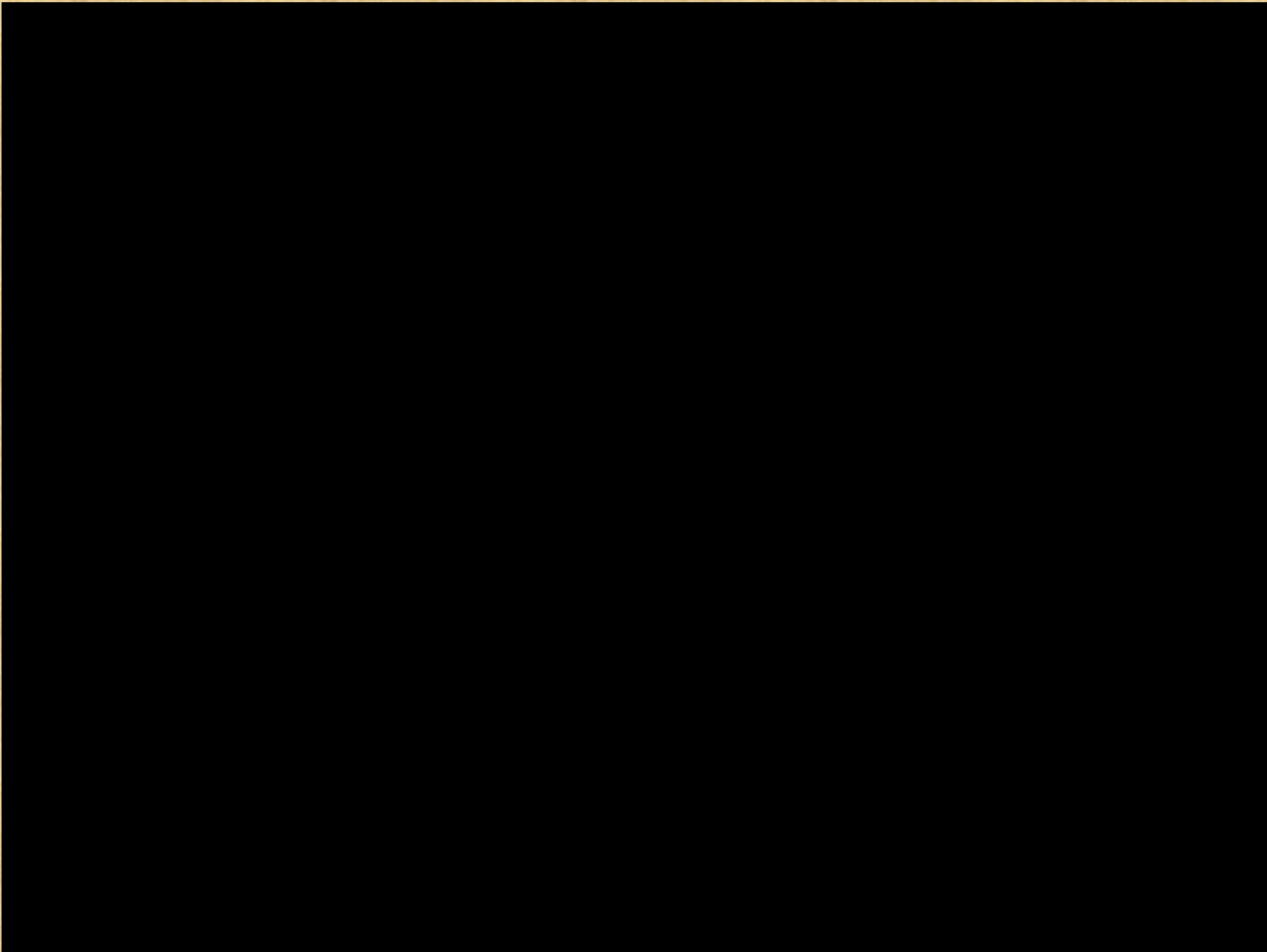


Re = 200



Re = 2000



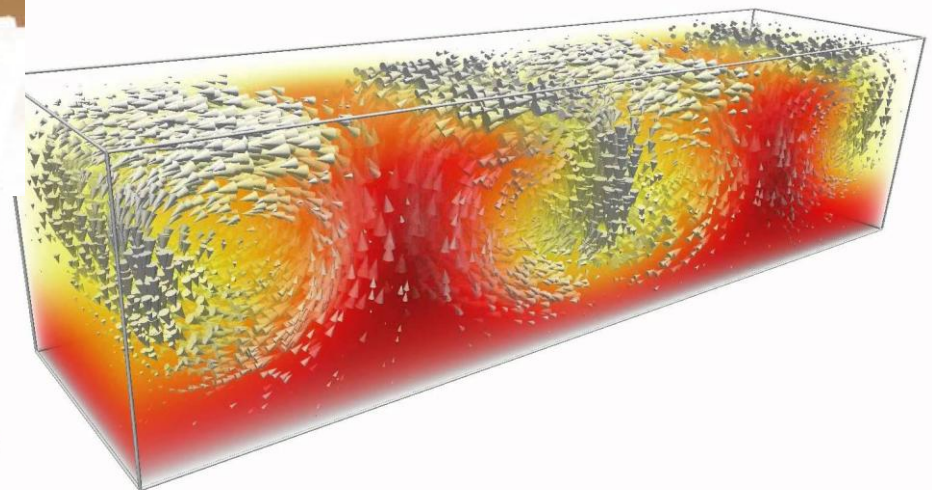
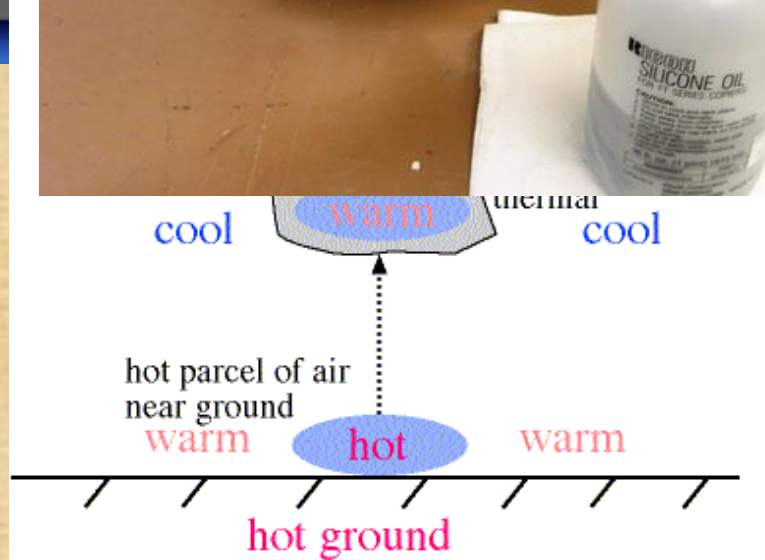
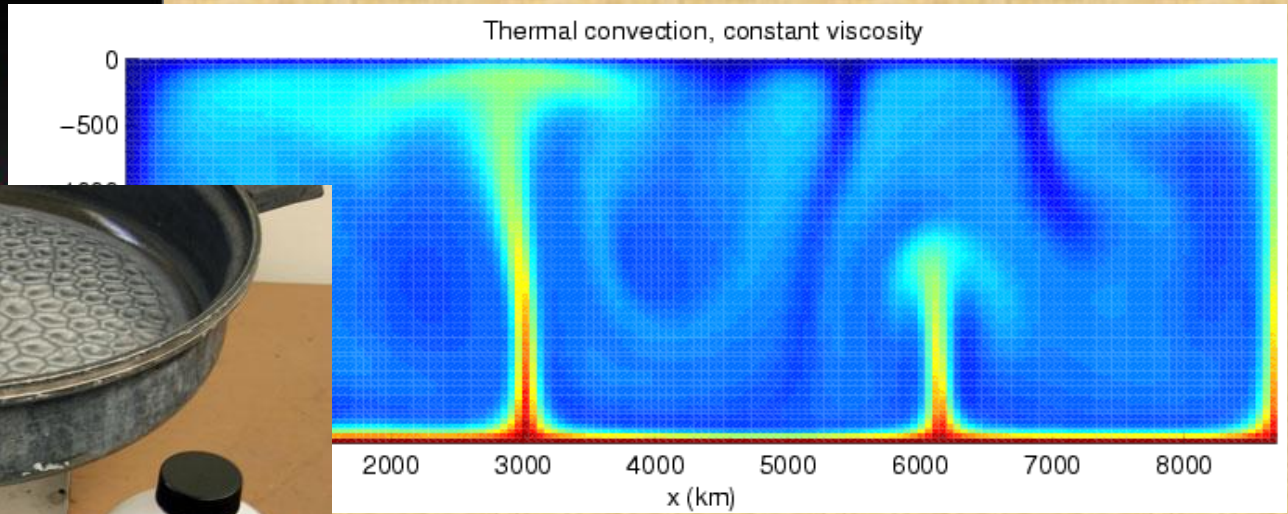
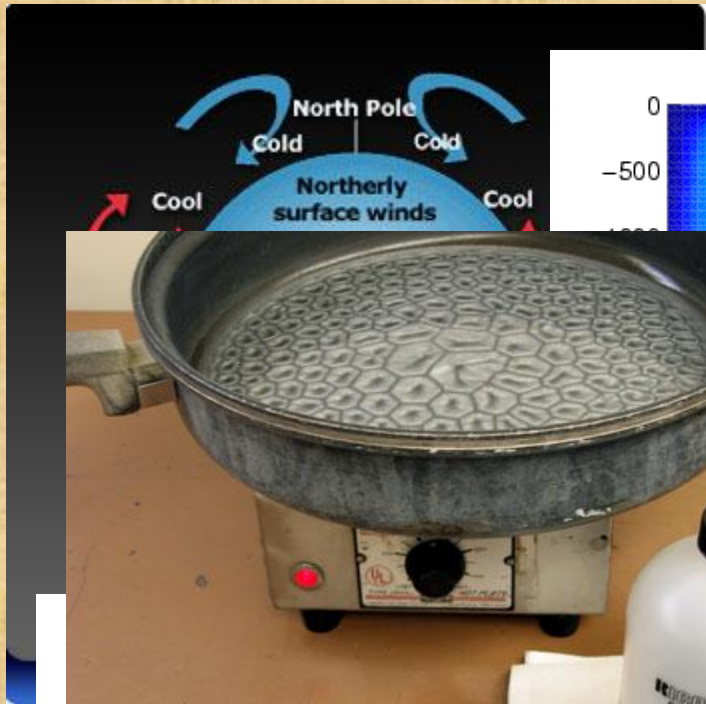


F.X.Trias, A. Gorobets, and A. Oliva. "Turbulent flow around a square cylinder at Reynolds number 22000: a DNS study", Computers & Fluids, 2014

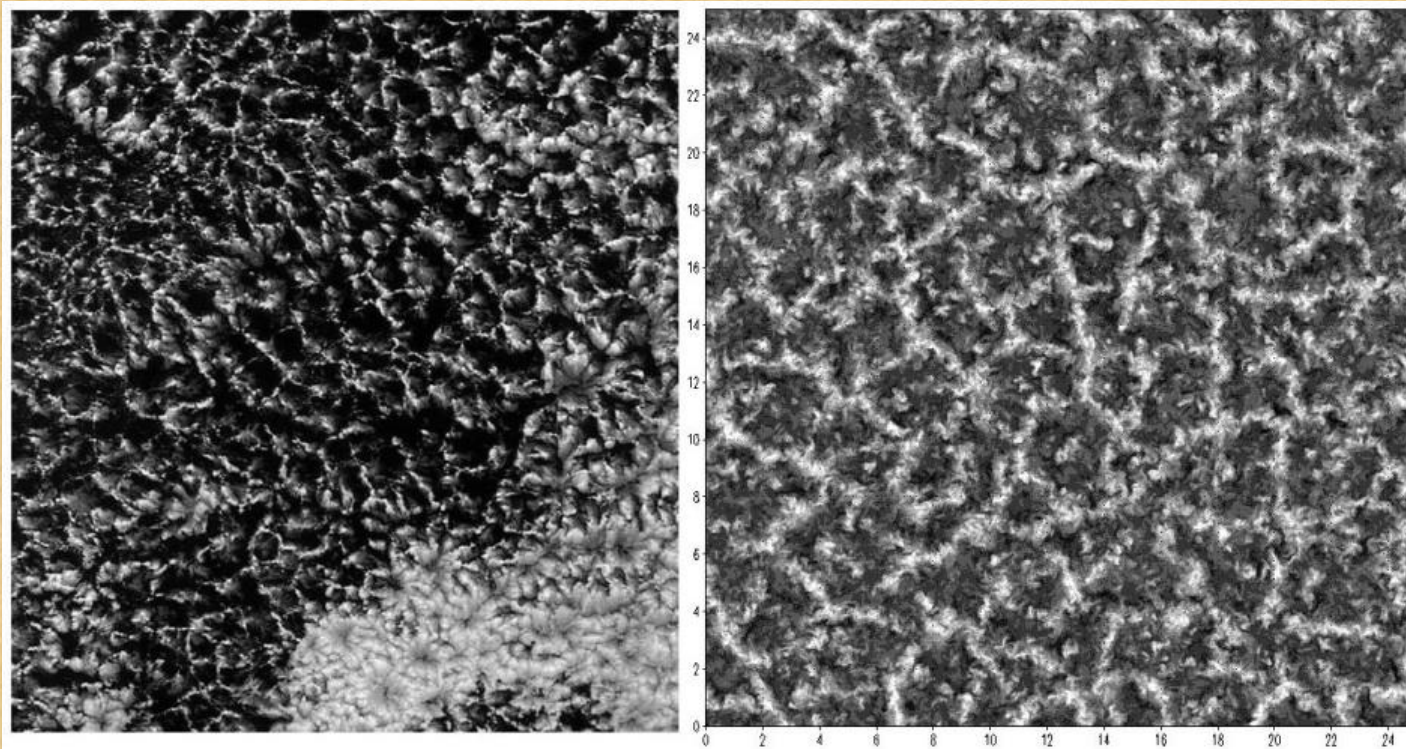
Физические механизмы развития турбулентности:

1. сдвиг скорости (увеличение Re).
2. уменьшение вязкости (увеличение числа Прандтля).
3. нагревание среды (увеличение числа Рэлея).
4. пр.

Конвекция.



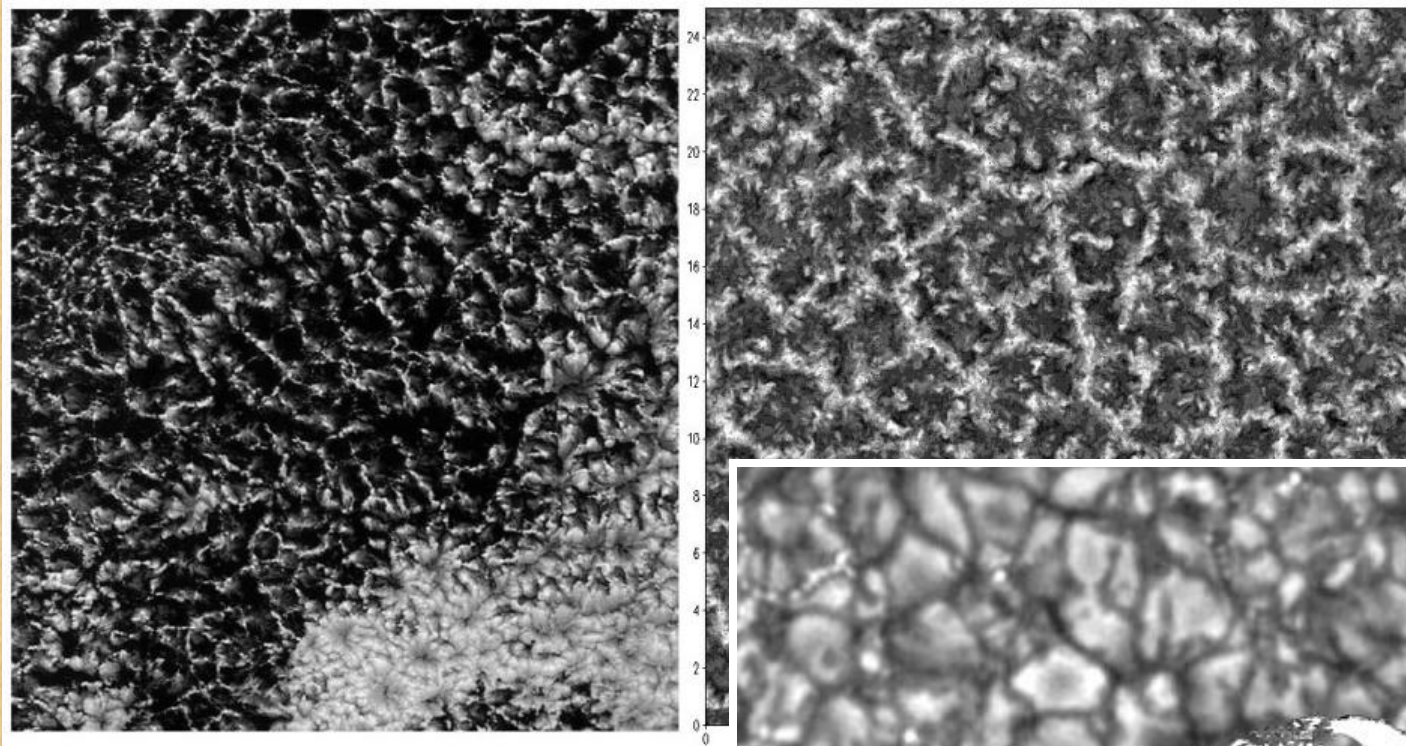
Конвективные ячейки в пограничном слое атмосферы



Фотография облачности

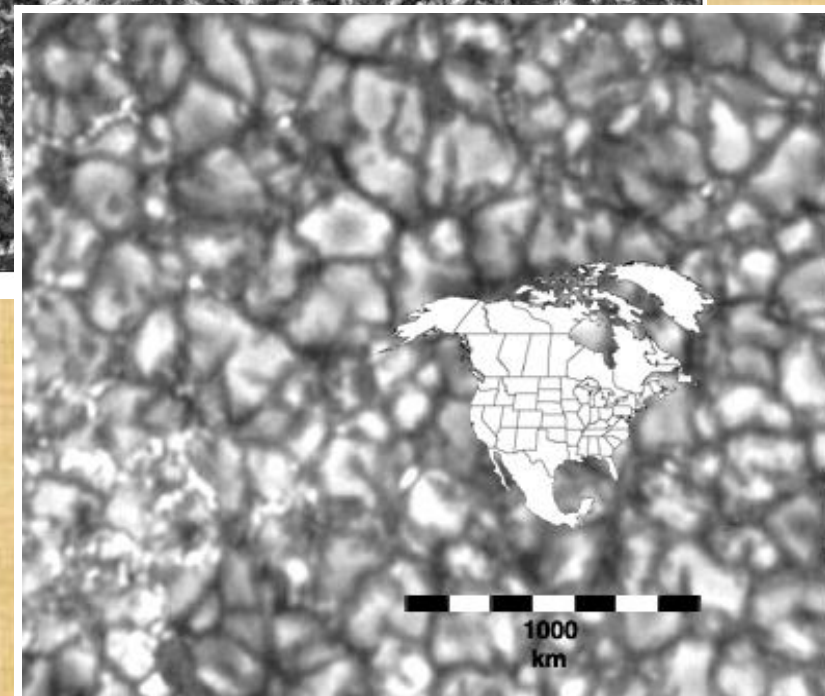
Численная модель

Конвективные ячейки в пограничном слое атмосферы



Фотография облачности

Конвективные ячейки
на Солнце (гранулы).





конвективные
ячейки

конвективные
валики

вихревая
дорожка Кармана

Турбулентность:

1. Физика процесса понятна.
2. Каким образом моделировать?

2D уравнения Навье-Стокса в цилиндрической СК.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y}$$

Уравнение переноса

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + (\gamma - 1) \left(\frac{e}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial e}{\partial x} \right) &= \frac{1}{\text{Re } \rho} \left[\frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu y \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial (yv)}{\partial y} \right) \right]; \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + (\gamma - 1) \left(\frac{e}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial e}{\partial y} \right) &= \frac{1}{\text{Re } \rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{4}{3y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu y \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial y}{\partial x} \right) - \frac{2\mu v}{y^2} - \frac{2}{3} v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{y} \right) \right]; \\ \frac{\partial e}{\partial t} + u \frac{\partial e}{\partial x} + v \frac{\partial e}{\partial y} + (\gamma - 1) e \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial (yv)}{\partial y} \right] &= \\ &= \frac{1}{\text{Re } \rho} \left\{ \frac{\gamma}{\text{Pr}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial e}{\partial x} \right) + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu y \frac{\partial e}{\partial y} \right) \right] + \mu \left(2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \right. \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{v}{y} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right) \right\}. \end{aligned} \quad (13.31)$$

2D уравнения Навье-Стокса в цилиндрической СК.

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial(yv)}{\partial y} \right) = 0; \\
 & \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial(yv)}{\partial y} \right) \right) + \text{Уравнение Бюргерса} + \\
 & + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu y \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial(yv)}{\partial y} \right); \\
 & \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + (\gamma - 1) \left(\frac{e}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial e}{\partial y} \right) = \frac{1}{\text{Re} \rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{4}{3y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu y \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial y}{\partial x} \right) - \frac{2\mu v}{y^2} - \frac{2}{3} v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{y} \right) \right]; \\
 & \frac{\partial e}{\partial t} + u \frac{\partial e}{\partial x} + v \frac{\partial e}{\partial y} + (\gamma - 1) e \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial(yv)}{\partial y} \right] = \\
 & = \frac{1}{\text{Re} \rho} \left\{ \frac{\gamma}{\text{Pr}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial e}{\partial x} \right) + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu y \frac{\partial e}{\partial y} \right) \right] + \mu \left(2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{v}{y} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right) \right\}.
 \end{aligned} \tag{13.31}$$

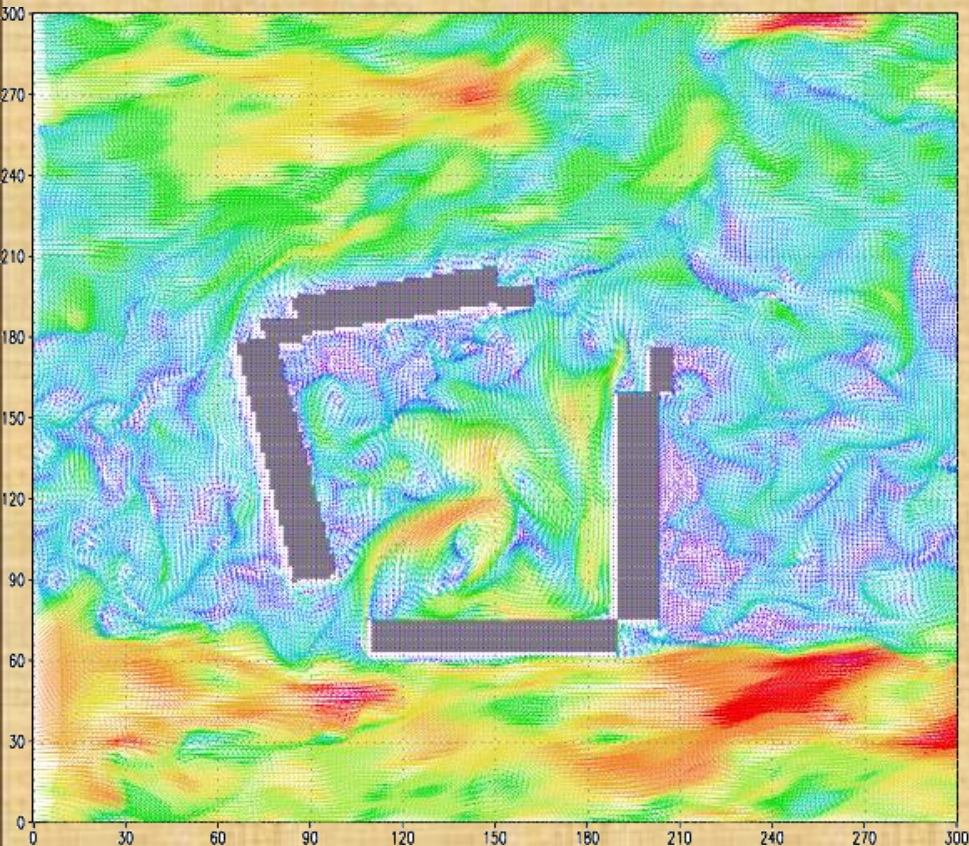
Турбулентность:

1. Физика процесса понятна.
2. Определены аналитические уравнения явления.
3. Выбрана сетка и способ аппроксимации уравнений.

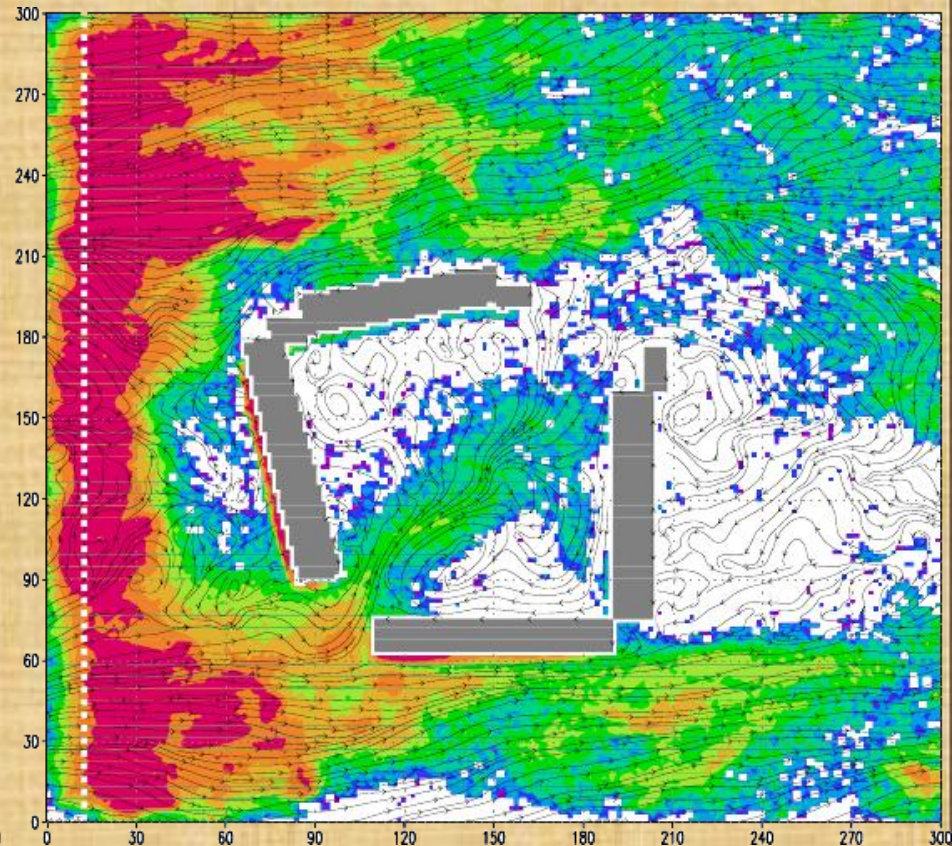
Остается реализовать программный комплекс и проверить его.

Моделирование обтекания проектируемой городской застройки (10 000 000 частиц примеси).

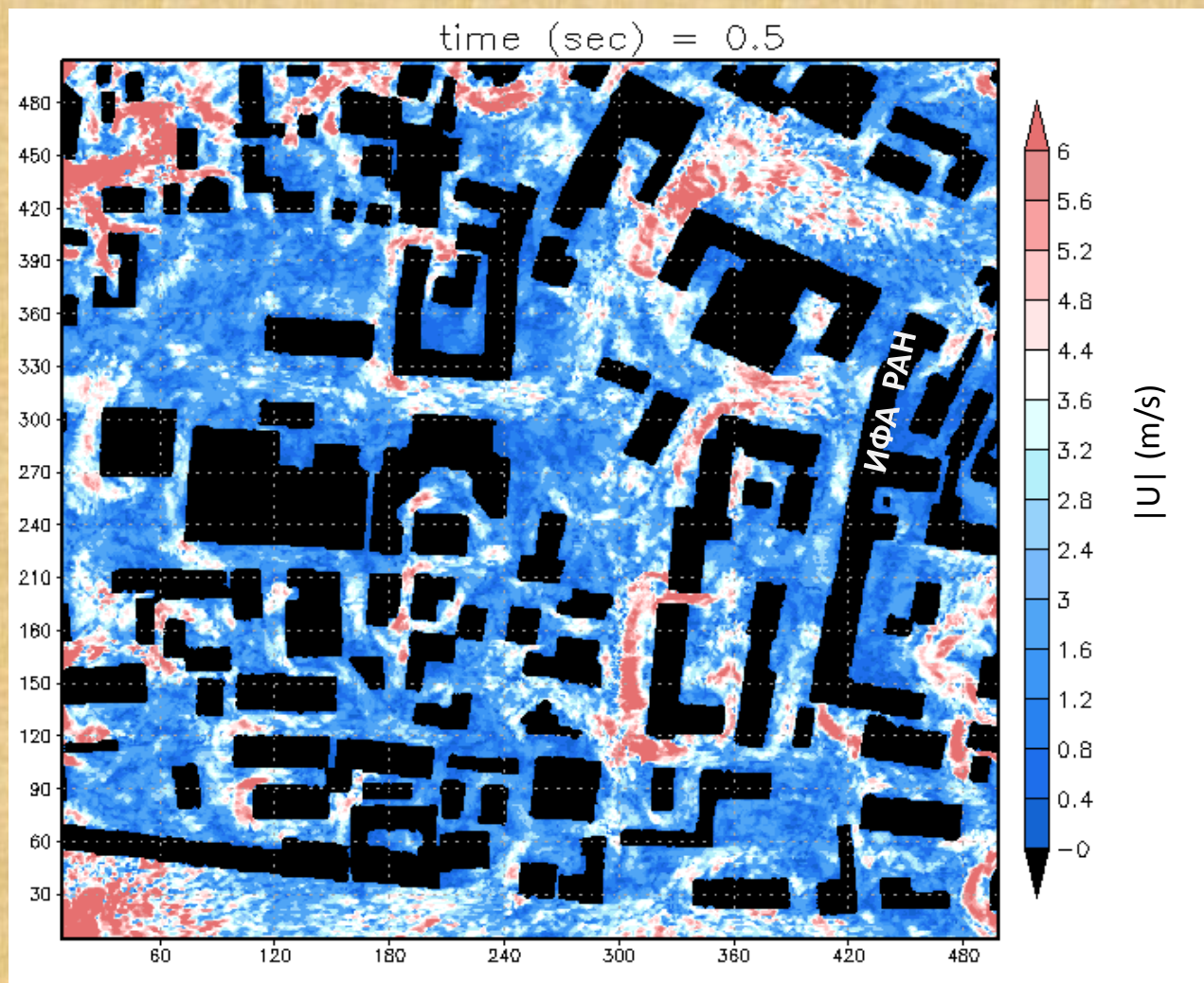
в отсутствии дороги

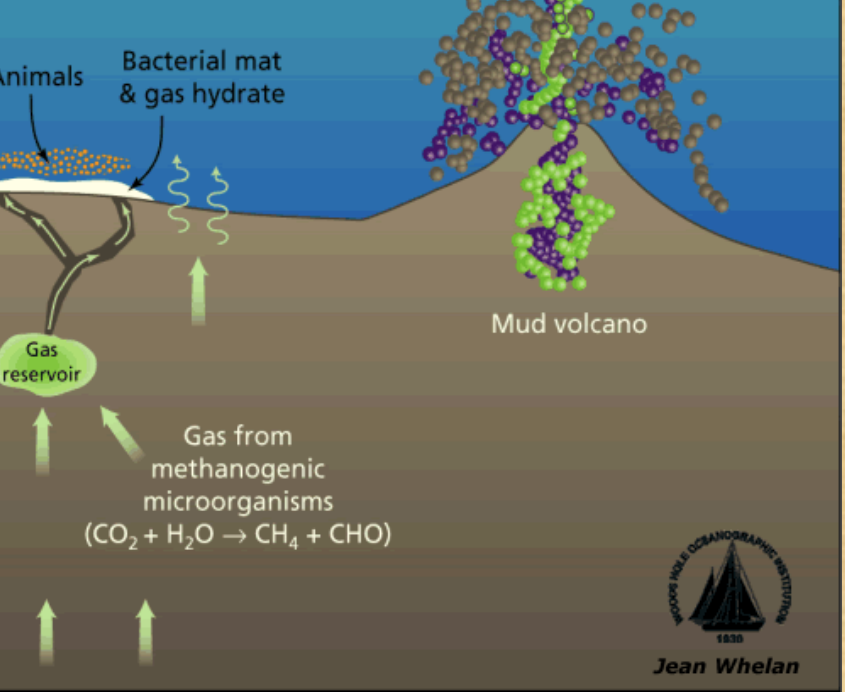


и в случае интенсивного движения



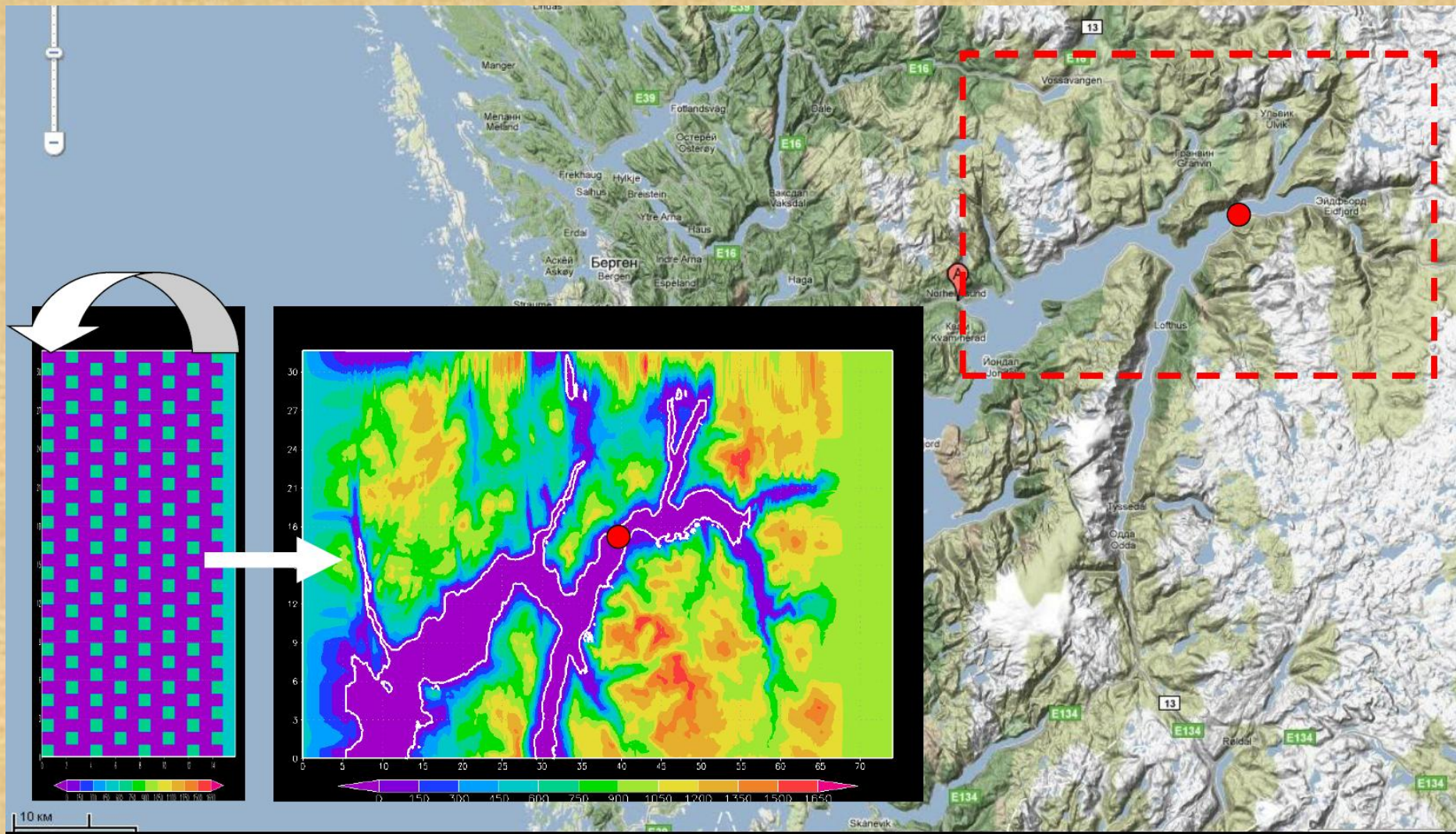
LES-модель ИВМ РАН - расчет турбулентного обтекания городской застройки, модуль скорости ветра на высоте 0.5 м.





Jean Whelan

Моделирование порывов ветра в норвежском фьорде.



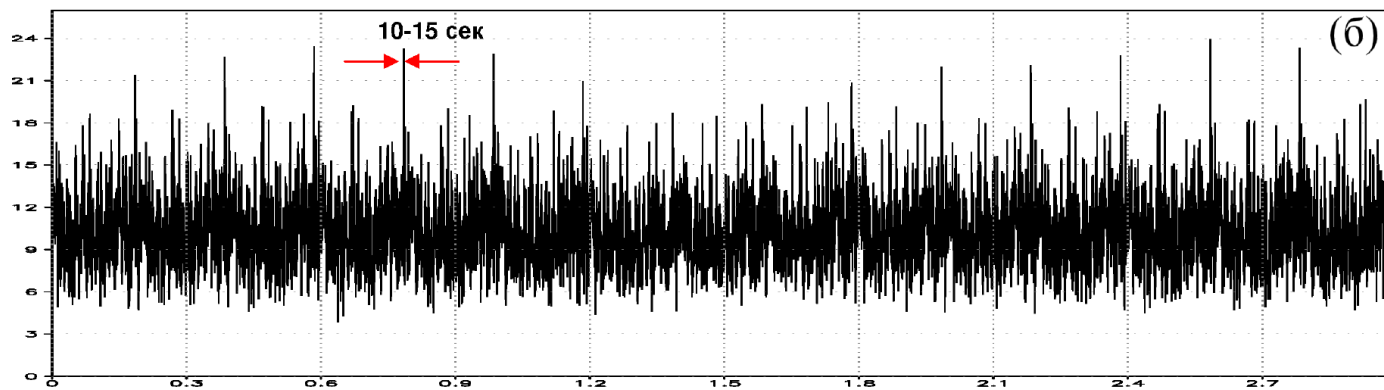
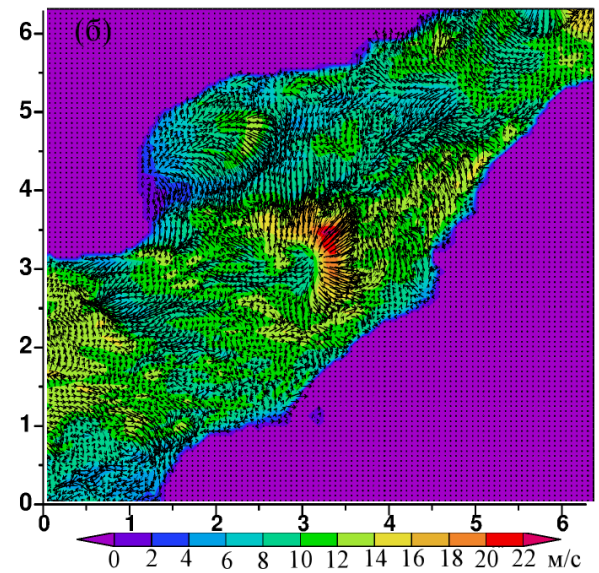
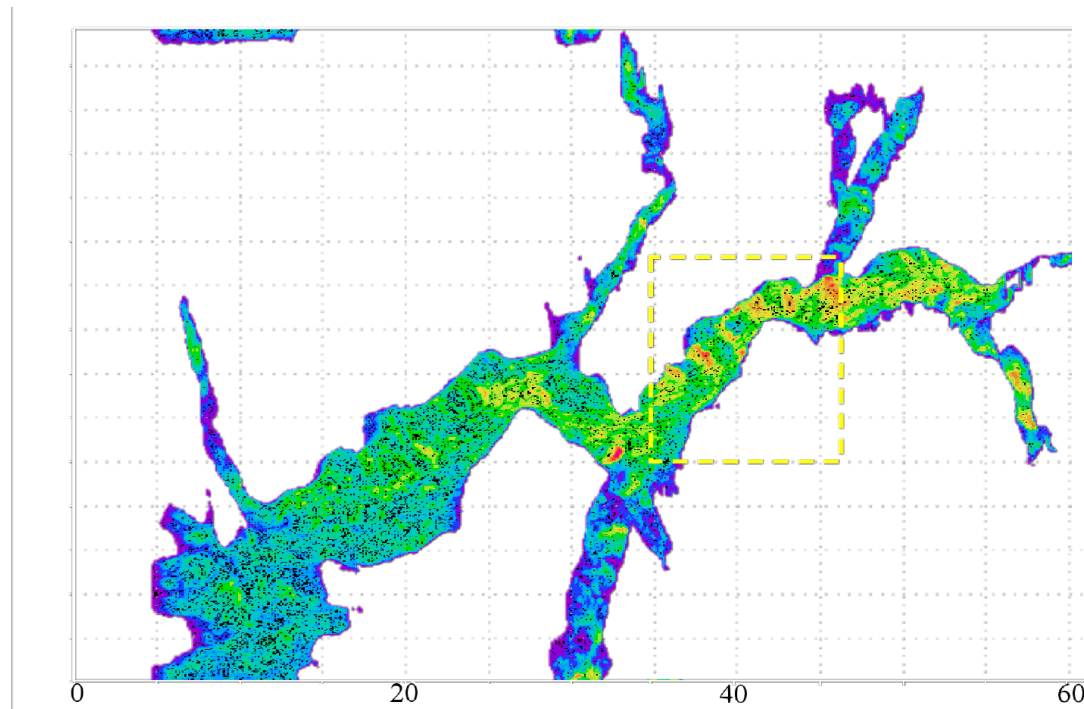
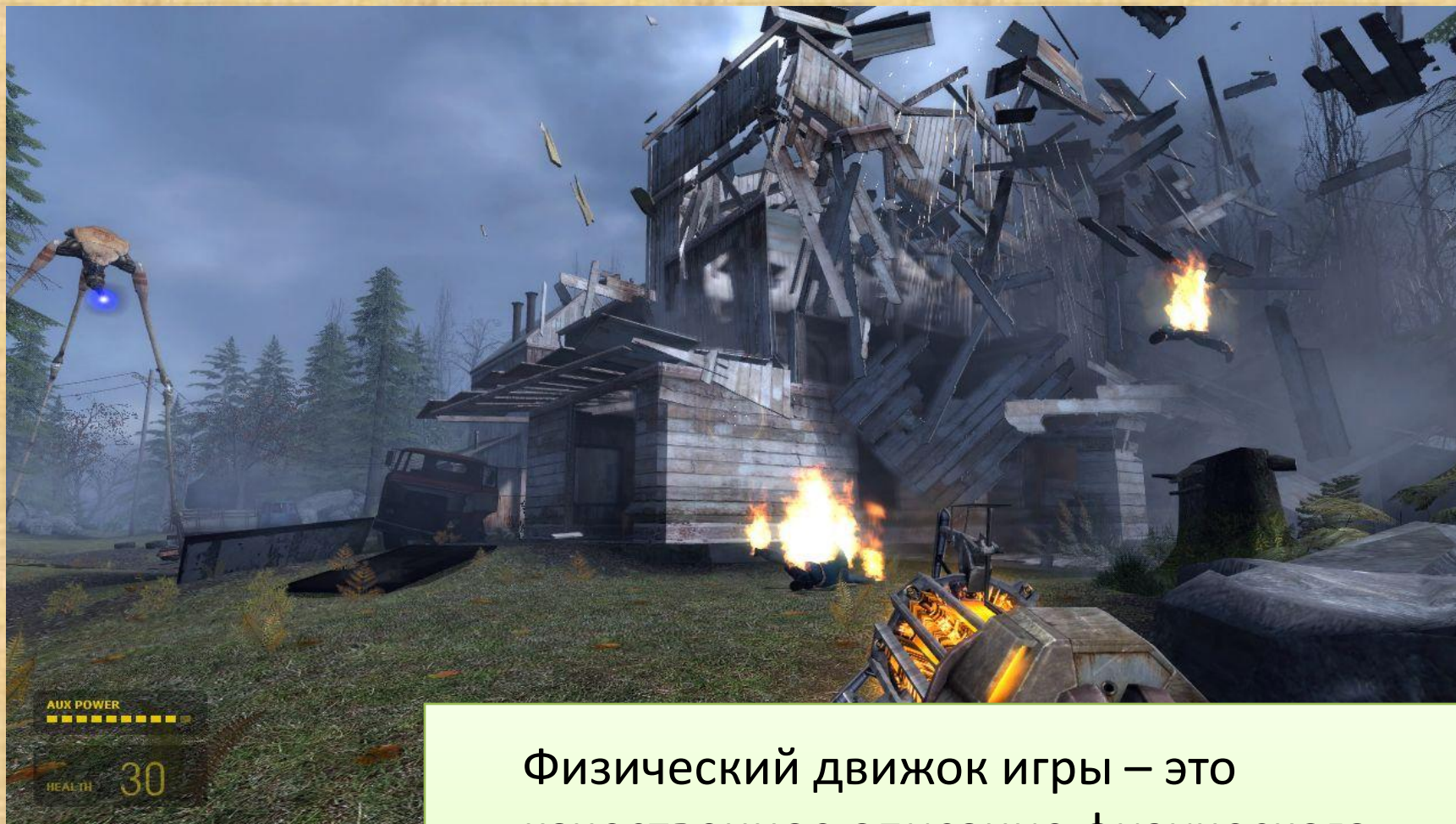


Рис. 5.18. Модуль скорости ветра у поверхности воды (а); временной ряд $\bar{u}(t)$ за 3 часа модельного времени в одной из точек вблизи предполагаемого сооружения(б)



Физический движок игры – это качественное описание физического процесса в режиме реального времени.

Научная мат. модель физического процесса – это инструмент исследований.

Эпоха простых задач прошла, поэтому

- Современное мат моделирование – это сложная физика и математика, десятки тысяч строк кода и большие коллективы разработчиков.

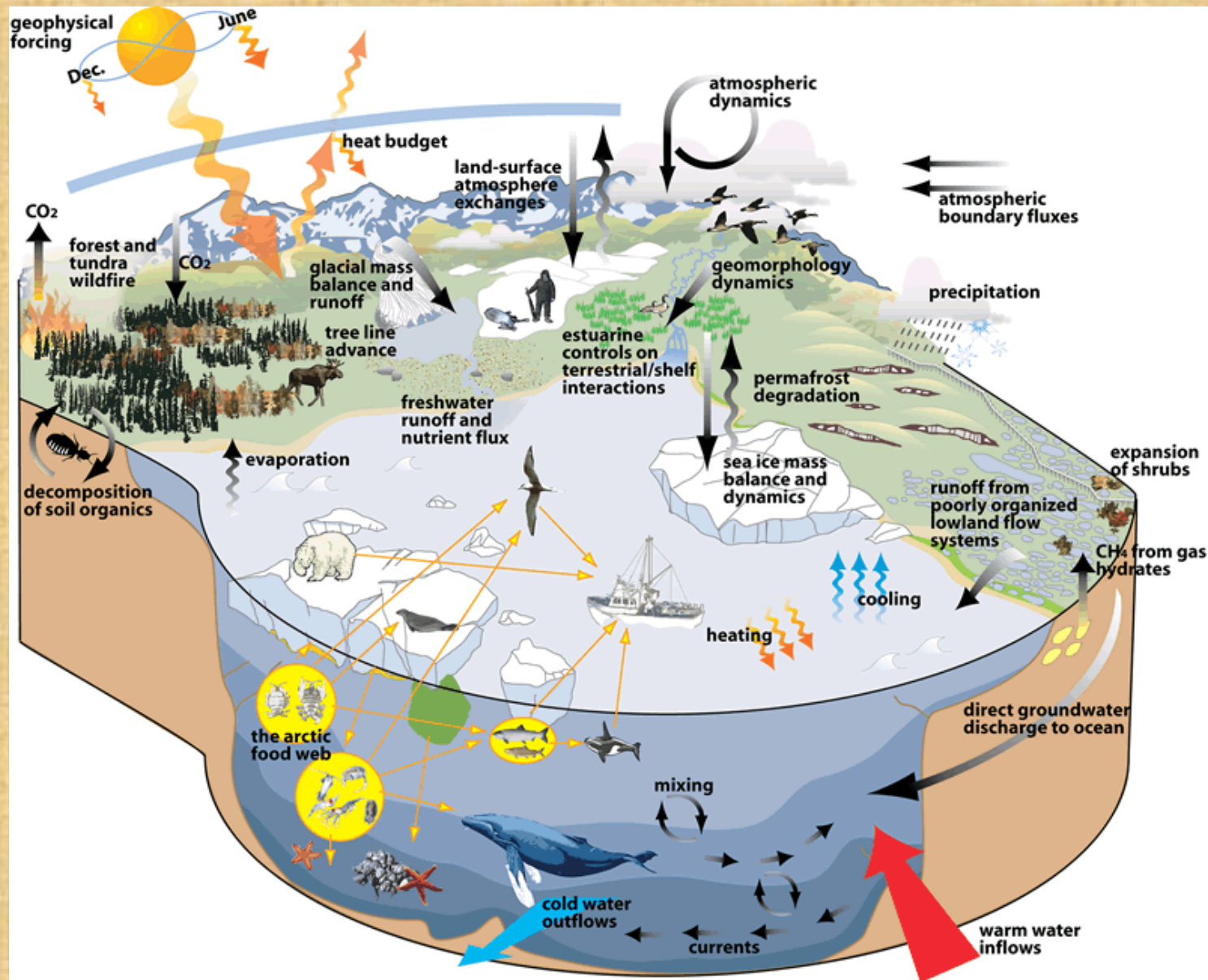
Мат моделирование является примером того, какими качествами должен обладать современный ученый в быстро меняющемся высоко конкурентном мире. Это:

- Высокая квалификация во многих областях знаний.
- Способность к обучению и усвоению новой информации.
- Ответственность, аккуратность и креативность.

Спасибо за внимание.
Вопросы?

Lord.rrd@gmail.com

Суперкомпьютерное моделирование земной системы.



Численная модель обычно включает в свой состав три основных компонента:

Система подготовки
начальных данных

Система параметризаций
процессов подсеточного
масштаба

Вычислительная модель

- Уравнения динамики процесса.
- Сетка.
- Уравнения в конечно-разностной форме.
- Программный комплекс.
- Система постпроцессинга.
- Верификация результатов.

Прогноз и предсказуемость.

